



TITLE:

液体薄膜にたつ非線型表面張力波 (連続体力学における非線型方程式 の近似解法)

AUTHOR(S):

松内, 一雄

CITATION:

松内, 一雄. 液体薄膜にたつ非線型表面張力波 (連続体力学における非線型方程式の近似解法). 数理解析研究所講究録 1974, 218: 197-214

ISSUE DATE:

1974-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/105284>

RIGHT:

液体薄膜にたつ非線形表面張力波

阪大 基礎工 松内一雄

§1. はじめに

液体薄膜が崩壊して水滴になる現象は工学上重要であり、特に化学の分野で古くから研究されてきた。1833年に Savart は二つの液体 jet を衝突させることによってできる expanding sheet などの位まで sheet として広がるかを実験的に調べ、その最大半径がどのようなパラメータによっているかを考察した。しかしながら、彼自身はこれに対する理論的な解析は行わなかった。1959年、Taylor¹⁾はこの現象を Weber 数 $(=u/(pl/2T)^{1/2})$ が1より大なる状態から sheet の端で1になる流れであると理解した。ここで、 u は薄膜の流速であり、 ρ が密度、 l が厚さ、 T が表面張力である。また、線形安定論の立場から、まわりの空気の影響による不安定の問題が1953年に Squire²⁾によって取りあげられた。そして、ある種の不安定が存在することが確かめられ、薄膜崩壊の機構に重要な役割を果たす可能性があることが示され

た。

ところが、最近になって分散性媒質中を伝わる非線形波の変調の問題が注目をあびてきた。このような波の変調は非線形 Schrödinger 方程式に支配され、その解の性質から振幅一定の波はある種の攪乱に対し不安定になることが示された。³⁾⁻⁹⁾ 例えば、Hasimoto & Ono⁷⁾ は水面重力波が、その波数を k 、水の深さを h として、 $kh > 1.363$ の条件を満たしているとき変調不安定が起こることを、非線形 Schrödinger 方程式から導びいた。

ここでは、薄膜にたつ表面張力波が変調不安定を起こし、この不安定が崩壊に導びくもう一つの可能性を示えることが示される。薄膜にたつ波にはその上面、下面の対称性から、対称波、反対称波と呼ばれている二種類の波が存在する。その振幅は非線形

Schrödinger 方程式

に支配されることが

示される。そして、

その解の性質から振



図1. (a)対称波、(b)反対称波

幅一定の波はすべての波数に対し不安定であり、かつ対称波の最大増幅率が反対称波のそれに比べ大なることから、崩壊に対しては対称波がより重要であることがわかる。また無限

深さの流体にたつ非線形表面張力波について Crapper¹⁰⁾によって得られた厳密解は非線形 Schrödinger 方程式の解として得られることを示す。

§2. 問題の定式化

密度が ρ 、表面張力が T 、一様な厚さが l であるような静止液体膜を考える。この液体膜は表面張力の影響に比べ重力の影響が無視できるほど十分薄いと考える。このとき、重力加速度を g として、 $l \ll (T/\rho g)^{\frac{1}{2}}$ 。運動が静止から始まるとき、その流れは非回転的であるので、次の二次元 Laplace 方程式によって波の運動は支配される。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \quad (2.1)$$

ここで ϕ は速度ポテンシャルであり、直角座標 x は水平右方向に、 y は垂直上方にとる。自由表面における境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) &= \eta_{xx} / (1 + \eta_x^2)^{\frac{3}{2}} \\ \phi_y &= \eta_t + \phi_x \eta_x \end{aligned} \right\} \text{at } y = \eta(x, t) \quad \begin{matrix} (2.2) \\ (2.3) \end{matrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) &= -\eta'_{xx} / (1 + \eta'^2_x)^{\frac{3}{2}} \\ \phi_y &= \eta'_t + \phi_x \eta'_x \end{aligned} \right\} \text{at } y = \eta'(x, t) \quad \begin{matrix} (2.4) \\ (2.5) \end{matrix}$$

である。ただし、 $\eta(x, t)$ 、 $\eta'(x, t)$ はそれぞれ上と下の自由表面を膜の中心面から測ったものである。指標 x, y, t はそれぞれ、 x, y と時間 t に関する偏微分を示している。またすべての量は代表長さとして半値幅 $l/2$ 、代表速度として反対称波の長波長の極限での位相速度 $(2T/\rho l)^{1/2}$ で無次元化されている。波の非線形性は十分弱く、その結果、変調は時間、空間的にゆっくりと起こると仮定する。この系を記述するために次のような新しい変数を導入する。⁸⁾

$$x_0 = x, \quad x_1 = \epsilon x, \quad x_2 = \epsilon^2 x; \quad (2.6)$$

$$t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t; \quad (2.7)$$

ここで、 ϵ は半値幅に対する振幅の比として定義される微小パラメータ^{*}である。このとき微分演算子 $\partial/\partial x$ 、 $\partial/\partial t$ は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sum_{n=0}^2 \epsilon^n \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{n=0}^2 \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n} \quad (2.9)$$

* 空気にとりまかれた水の薄膜の場合、 $l = 10^{-2} \text{cm}$ として、通常長さ^{*}と時間の単位はそれぞれ、 $5 \times 10^{-3} \text{cm}$ 、 $4 \times 10^{-5} \text{sec}$ となる。したがって、 $\epsilon = 10^{-2}$ と選んでも、 t_2 は元の単位で 10^1sec 程度となり、かなり急激な変化をあつかっていることになる。

のように展開される。また一方、弱い非線形性の仮定から $\phi(x, y, t)$, $\eta(x, t)$, $\eta'(x, t)$ も ϵ の中に展開できるだろう。すなわち、

$$\phi = \sum_{n=1} \epsilon^n \phi_n(x_0, x_1, x_2, y, t_0, t_1, t_2), \quad (2.10)$$

$$\eta = 1 + \sum_{n=1} \epsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2), \quad (2.11)$$

$$\eta' = -1 + \sum_{n=1} \epsilon^n \eta'_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2). \quad (2.12)$$

この三つの式を(2.1)-(2.5)に代入し、 ϵ の中で整理すると、次のような式が得られる (ϵ^2 までを記す)。

$O(\epsilon)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t_0} - \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_0^2} = 0 \quad \text{at } y=1, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial \eta_1}{\partial t_0} = 0 \quad \text{at } y=1, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial t_0} + \frac{\partial^2 \eta'_1}{\partial x_0^2} = 0 \quad \text{at } y=-1 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \eta'_1}{\partial t_0} = 0 \quad \text{at } y=-1 \quad (2.17)$$

$O(\epsilon^2)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = -2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x_0 \partial x_1}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} - \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x_0^2} = & -\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t_0 \partial y} \eta_1 - \frac{1}{2} \{ (\frac{\partial \phi_1}{\partial x_0})^2 + (\frac{\partial \phi_1}{\partial y})^2 \} \\ & + 2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x_0 \partial x_1} \text{ at } y=1, \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial t_0} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \eta_1 + \frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_0} \text{ at } y=1, \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t_0} + \frac{\partial^2 \eta_2'}{\partial x_0^2} = & -\frac{\partial \phi_1}{\partial t_1} - \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t_0 \partial y} \eta_1' - \frac{1}{2} \{ (\frac{\partial \phi_1}{\partial x_0})^2 + (\frac{\partial \phi_1}{\partial y})^2 \} \\ & - 2 \frac{\partial^2 \eta_1'}{\partial x_0 \partial x_1} \text{ at } y=-1, \quad (2.21) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2'}{\partial t_0} = -\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \eta_1' + \frac{\partial \eta_1'}{\partial t_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_0} \frac{\partial \eta_1'}{\partial x_0} \text{ at } y=-1 \quad (2.22)$$

$O(\epsilon^2)$:

.....

最初、オーダーの問題を考える。Laplaceの方程式(2.13)と境界条件(2.14)-(2.17)は二種類の波列解の存在を示している。すなわち、対称波と反対称波である。対称波に対して、その解は

$$\phi_1 = -\frac{ik^2 \cos k y}{\omega \cos k} A e^{i\theta} + \text{c.c.} + B_1^{(3)}, \quad (2.23)$$

$$\eta_1 = -\eta_1' = A e^{i\theta} + \text{c.c.}, \quad (2.24)$$

のように与えられる。ただし、 $\theta = kx_0 - \omega t_0$ で k 、 ω はそれぞれ波数と振動数であり、 k 、 ω は線形分散関係式

$$\frac{\omega^2}{k^2} = k \tanh k \quad (2.25)$$

を満たしている。また、複素振幅 A と実関数 $B_1^{(s)}$ は x_1, x_2, t_1, t_2 の関数で、C.C. は先だつ表式の複素共役を示している。

また、反対称波についても同様な解

$$\phi_1 = -\frac{ik^2}{\omega} \frac{\sinh k y}{\sinh k} A e^{i\theta} + \text{C.C.} + B_1^{(a)}, \quad (2.26)$$

$$\eta_1 = \eta_1' = A e^{i\theta} + \text{C.C.} \quad (2.27)$$

が得られ、その分散関係式は

$$\frac{\omega^2}{k^2} = k \coth k \quad (2.28)$$

となる。ここでも付加的な実関数 $B_1^{(a)}$ は x_1, x_2, t_1, t_2 によっている。線形分散関係式 (2.25) (2.28) はすでに Taylor¹¹⁾ によって得られている。

3.3. 反対称波

反対称波について第=次近似決定の問題に移ろう。第一近似の解を (2.18)-(2.22) に代入し、これらの方程式を ϕ_2 について解くと

$$\phi_2 = \frac{3i\omega}{4} \frac{\cosh 2ky}{\cosh^2 k} A^2 e^{2i\theta} - \frac{k}{2\omega \sinh k} (2ky \cosh ky$$

$$-\sin h k y) \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} + c.c. + B_2^{(a)} \quad (3.1)$$

を得る。ただし、ここで(2.18)の同次解である $B_2^{(a)}$ は高次の scale によっている。自由表面 η_2 と η_2' は式(2.20)と(2.22)を t_0 で積分することによって得られる。すなわち、

$$\begin{aligned} \eta_2 = & -\frac{k^4}{2\omega^2} A^2 e^{2i\theta} - \frac{ik}{\omega} \left(\frac{\omega}{2k^2} + \frac{k^2}{\omega} \right) \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} \\ & - \frac{i}{\omega} \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} + c.c. + C_2^{(a)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \eta_2' = & \frac{k^4}{2\omega^2} A^2 e^{2i\theta} - \frac{ik}{\omega} \left(\frac{\omega}{2k^2} + \frac{k^2}{\omega} \right) \frac{\partial A}{\partial x_1} e^{i\theta} \\ & - \frac{i}{\omega} \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{i\theta} + c.c. + C_2'^{(a)}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし、 $C_2^{(a)}$ 、 $C_2'^{(a)}$ は t_0 に関する積分定数で高次のオーダーで決定される。 ϕ_2 、 η_2 を(2.19)に代入するか、 ϕ_2 、 η_2' を(2.21)に代入して、 $e^{i\theta}$ について整理する。それぞれの係数は0でなければならぬので、 $e^{i\theta}$ の係数から

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + C_9 \frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 \quad (3.4)$$

が得られ、'定数項' から

$$\frac{\partial B_1^{(a)}}{\partial t_1} = \frac{\omega^2(X^2-1)}{X^2} |A|^2 \quad (3.5)$$

が得られる。ここで $|A|$ は複素数 A の絶対値を示し、 $X = \cosh k$

で、 C_g は無限小振幅の波の群速度で

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\omega}{2kX} [3X + k(1-X^2)] \quad (3.6)$$

である。

(2.4) は振幅の変化の群速度で伝わることを示している。

また、(2.5) より非線形相互作用による誘導流れ $\partial B_1^{(0)}/\partial x_1$ が E^2 のオーダーで起こることがわかる。(2.4) の関係を用い、 x_1 で積分した後、 x_1 で微分すれば、この誘導流れは

$$\frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial x_1} = \frac{2\omega k(1-X^2)}{X[3X + k(1-X^2)]} |A|^2 \quad (3.7)$$

と表わされる。ただし、 x_1 による積分定数は変調不安定には重要ではないので、無視した。

オーダー E^2 と同様な手続きから、オーダー E^3 において、多少面倒な計算をすれば、 $E^{(0)}$ の係数から

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t_2} + C_g \frac{\partial A}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2} \frac{dC_g}{dk} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = s|A|^2 A + rA \quad (3.8)$$

を得る。ただし、

$$s = \frac{\omega k^2(6X^2-7)}{4X^2},$$

$$r = \frac{\omega k(1-X^2)}{2X} C_2^{(0)} + k \frac{\partial B_1^{(0)}}{\partial x_1}$$

で、上面に対する境界条件を用いて得られた。同様に、下面に対する境界条件を用いると

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial x_2} + G \frac{\partial A}{\partial x_2}\right) + \frac{1}{2} \frac{dG}{dk} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = S|A|^2 A + r'A \quad (3.9)$$

を得る。ただし、

$$r' = - \frac{\omega k (1-x^2)}{2x} G_2^{(a)} + k \frac{\partial B_1^{(a)}}{\partial x_1}.$$

更に、 η_3 , η_3' が x に比例しないように選んでやると、 $G_2^{(a)}$, $G_2'^{(a)}$ に対し、次の関係を得る。

$$\frac{\partial^2 B_1^{(a)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial G_2^{(a)}}{\partial x_1} + \frac{2k^3}{\omega} \frac{\partial |A|^2}{\partial x_1} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 B_1^{(a)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial G_2'^{(a)}}{\partial x_1} + \frac{2k^3}{\omega} \frac{\partial |A|^2}{\partial x_1} = 0 \quad (3.11)$$

両式に (2.7) を代入し、(2.4) の関係を用いると、 $G_2^{(a)}$, $G_2'^{(a)}$ は

$$G_2^{(a)} = \frac{4k[3x + 2k(1-x^2)]}{[3x + k(1-x^2)]^2} |A|^2 \quad (3.12)$$

$$G_2'^{(a)} = - \frac{4k[3x + 2k(1-x^2)]}{[3x + k(1-x^2)]^2} |A|^2 \quad (3.13)$$

と表わされる。ただし、ここでも積分定数は省略した。 $\partial B_1^{(a)} / \partial x_1$, $G_2^{(a)}$ を (2.8) に代入するか、 $\partial B_1^{(a)} / \partial x_1$, $G_2'^{(a)}$ を (3.9) に代入

すると、複素振幅 A を支配する方程式は

$$i\left(\frac{\partial A}{\partial t_1} + G \frac{\partial A}{\partial x_1}\right) + \frac{1}{2} \frac{dG}{dk} \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} = \gamma_a |A|^2 A \quad (3.14)$$

となる。ここで

$$\xi = \epsilon(x - Gt), \quad \tau = \epsilon^2 t$$

で定義される新変数³⁾⁻⁵⁾を導入すると、(3.14) はより簡単に

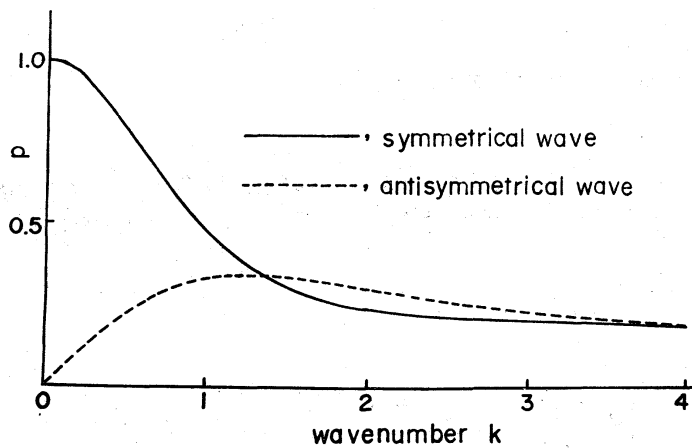
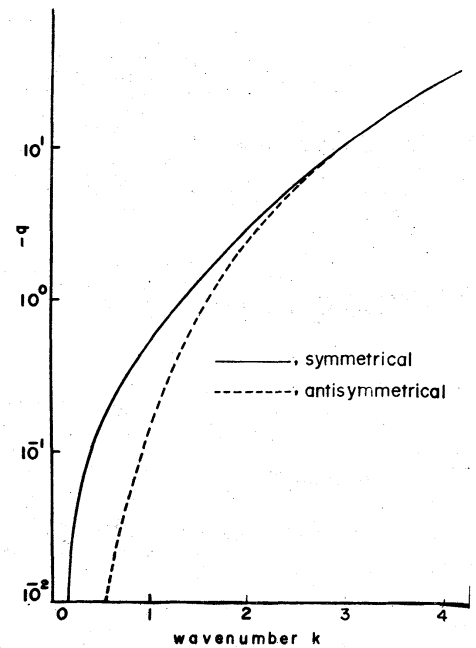
$$i \frac{\partial A}{\partial \tau} + P_a \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} = \gamma_a |A|^2 A \quad (3.15)$$

となる。ここで

$$P_a = \frac{1}{2} \frac{dG}{dk} = \frac{\omega[3k^2 X^4 - 6kX^3 + (3-2k^2)X^2 + 6kX - k^2]}{8k^2 X^2} \quad (3.16)$$

$$\gamma_a = \frac{\omega k^2 [6k^2 X^6 - 12kX^5 + (6-19k^2)X^4 + 30kX^3 - 5(3-4k^2)X^2 - 18kX - 7k^2]}{4X^2 [3X + k(1-X^2)]^2} \quad (3.17)$$

(3.15) 式は一般に非線形 Schrödinger 方程式と呼ばれ、いろいろ異なった分野ですでに得られている。係数 P_a はすべての波数に対し正であり、 γ_a はすべての波数に対し負となる。これらの係数は波数 k の関数として図2と3に記す。

図2. P のグラフ図3. $-g$ のグラフ

§4. 対称波

反対称波の場合と同様な計算を行なえば、対称波についても同じような非線形 Schrodinger 方程式を得る。すなわち

$$i \frac{\partial A}{\partial t} + P_s \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = g_s |A|^2 A \quad (4.1)$$

ただし、

$$P_s = \frac{1}{2} \frac{dG}{dk} = \frac{\omega [3k^2 Y^4 - 6kY^3 + (3-2k^2)Y^2 + 6kY - k^2]}{4k^2 Y^2}, \quad (4.2)$$

$$g_s = \frac{\omega k^2 [6k^2 Y^2 - 12kY^5 + (6-19k^2)Y^4 + 30kY^3 - 5(3-4k^2)Y^2 - 18kY - 7k^2]}{4Y^2 [3Y + k(1-Y^2)]^2} \quad (4.3)$$

かつ、 $Y = \tanh k$ 。 (4.2), (4.3) から $P_s > 0$, $g_s < 0$ であることがわかる (図 2, 3)。誘起された流れと表面変位は

$$\frac{\partial B_1^{(s)}}{\partial x_1} = \frac{2\omega k (1-Y^2)}{Y[3Y+k(1-Y^2)]} |A|^2, \quad (4.4)$$

$$C_2^{(s)} = \frac{4k[3Y+2k(1-Y^2)]}{[3Y+k(1-Y^2)]^2} |A|^2 \quad (4.5)$$

となり、 $|A|^2$ に比例している。

この対称波は、その上、下面の対称性から、任意の深さの流体にたつ非線形表面張力波とみなすことができる。例えば、無限に深い場合について現在までに得られている結果はこの対称波の特別な場合として含まれている。事実、 A_0, Ω を実定数として $A = A_0 \exp(-i\Omega t)$ とおくと、自由表面 η は ϵ^2 のオーダーまで

$$\eta = -\eta' = 1 + \frac{k}{3} \epsilon^2 Q_0^2 + \epsilon Q_0 \cos \zeta - \frac{k}{4} \epsilon^2 Q_0^2 \cos 2\zeta. \quad (4.6)$$

となる。ここで、

$$Q_0 = 2A_0, \quad \zeta = kx - (\omega - k^{\frac{7}{2}} \epsilon^2 Q_0^2 / 16) t.$$

この解は位相速度

$$C = k^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{k^2}{16} \epsilon^2 Q_0^2 \right) \quad (4.7)$$

で進行する波列を示している。二つの結果、(4.6)、(4.7) は前者の非振動項を除いて、Crapper⁽¹⁰⁾ や Pierson & Fife⁽¹²⁾ の結

果と一致する。非振動項は座標軸の移動に関するもので、この不一致は何ら本質的ではない。

§5. 変調不安定と薄膜の崩壊

まず、振幅一定の波を考える。オシロ式(3.15)や(4.1)は

$$A = A_0 \exp i(f_1 \xi - f_2 \tau) \quad (5.1)$$

で表わされるような解を持っている。ただし、 A_0 は複素定数で、かつ f_1, f_2 は τ の関数で

$$\frac{d}{d\tau} (f_1 \xi - f_2 \tau) + P f_1^2 = -g |A_0|^2 \quad (5.2)$$

なる関係を満たしている。解(5.1)は振幅一定の波を表わしている。特に、 K, Ω を定数として $f_1 = K, f_2 = \Omega \tau$ とおけば一定の位相速度で進行する定常波列となる。さらに、 $K = 0$ とすれば、位相 $\xi = kx - \omega \tau$ をもつ進行波列を示す。ただし

$$\bar{\omega}(k, \epsilon | A_0) = \omega + \epsilon^2 |A_0|^2 g \quad (5.3)$$

で、この関係は「amplitude dispersion」¹³⁾と呼ばれていて、現在までになされてきた非線形波列に関する研究の多くはこの簡単な解に属している。

解(5.1)の安定性は Tanuti & Washimi³⁾ や Hasimoto &

$\Omega_0^{(2)}$ によって調べられている。その結果によれば、このような振幅一定の波は $\rho\gamma < 0$ のとき微小攪乱に対して不安定になる。したがって、薄膜にたつ分散性の振幅一定の波は不安定を起こす。なぜなら、この場合常に $\rho\gamma < 0$ であるから(図2, 3を参照)。さらに最大増幅率 δ_{\max} は攪乱波

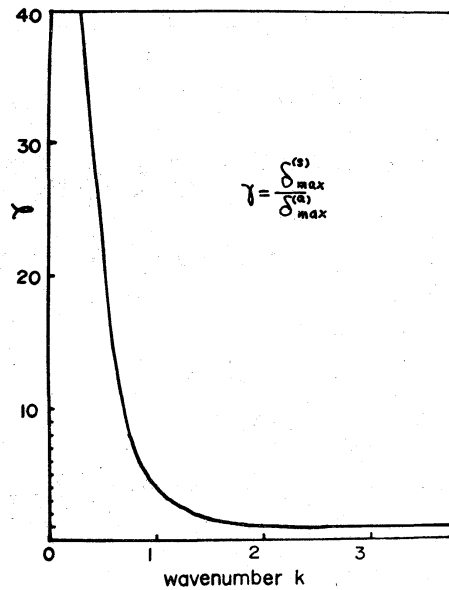
$$A = (A_0 + \epsilon \phi) \exp i(f_1 z - f_2 t + \epsilon K) \quad (5.4)$$

に対し、

$$\delta_{\max} = 18|A_0|^2 \quad \text{for } k = \sqrt{-\frac{\rho}{p}} |A_0| \quad (5.5)$$

で与えられる。ここで k は攪乱の波数であり、 ϵ は微小パラメータ、 ϕ 、 ψ は与えられた関数である。

不安定の度合いを知るために反対称波の最大増幅率に対する対称波の最大増幅率の比を考えてみる。この比は常に1より大で、 k の減少とともに単調に増加する(図4)。このことから対称波の不安定が薄膜崩壊に対しては反対称波よりも重要であることがわかる。この傾向は Squire²⁾ の考察した不安定とは逆である。話を対称波に限れば、(4.5) で与えられる誘起された自由表面の変位は振幅の二乗に比例し、かつその係数が正であることより、振幅の増加は膜の厚さの増加へ導びくことがわかる。ところが(5.5)によれば、変調された振幅 A は波長入が

図4. 最大増幅率の比 γ

$$\lambda = \frac{2\pi}{\epsilon|A_0|} \left(-\frac{P_3}{g_s}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

で与えられるような周期性をもつことがわかる。このことから最初振幅一定の波を与えたところと、振幅の増加したところで厚さの増加を、振幅の減少したところで厚さの減少をひき起こす。この様子が多少拡大して図5に示されている。線形安定論

の範囲内で、また弱い非線形性の仮定から、 $\epsilon, \hat{\epsilon} \ll 1$ なる条件が満たされなくなるときにどういうことが起こるかという具体的な問題には答えることができない。しかし、もしこの変調不安定が崩壊に重要な役割を果たしているとするれば、上の議論から(図5において矢印で示された変化が崩壊につながるまで起こるとして)この種の不安定によってできる水滴の大きさ d (直径)は大まかに

$$d \approx \left(-\frac{P_3}{g_s}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4l^3}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

となる。ここで、 a は次元をもった実際の振幅である。

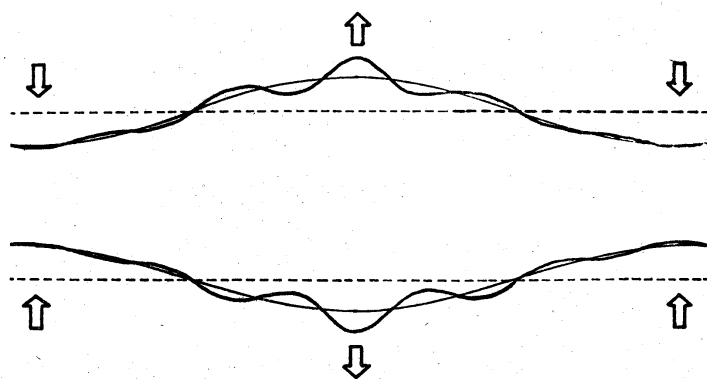


図5. 一定の振幅をもた波の自由表面の時間的变化。矢印が変化の方向を示している。

References

- 1) G.I.Taylor: Proc.Roy.Soc. A253 (1959) 313.
- 2) H.B.Squire: Brit.J.appl.Phys. 4 (1953) 167.
- 3) T.Taniuti and H.Washimi: Phys.Rev.Letters 21 (1968) 209.
- 4) T.Taniuti and N.Yajima: J.math.Phys. 10 (1969) 1369.
- 5) N.Asano, T.Taniuti and N.Yajima: J.math.Phys 10 (1969) 2020.
- 6) T.Kakutani and N.Sugimoto: submitted to Phys. of Fluids.
- 7) H.Hasimoto and H.Ono: J.Phys.Soc.Japan 33 (1972) 805.
- 8) T.Kawahara: J.Phys.Soc.Japan 35 (1973) 1537.
- 9) Y.Inoue and Y.Matsumoto: to be published in J.Phys.Soc.Japan 36 (1974).
- 10) G.D.Crapper: J.Fluid Mech. 2 (1957) 532.
- 11) G.I.Taylor: Proc.Roy.Soc. A253 (1959) 296.
- 12) W.J.Pierson Jr. and P.Fife: J.geophys.Res. 66 (1961) 163.
- 13) M.J.Lighthill: J.Inst.Math.Appl. 1 (1965) 269.